

Matematyka dyskretna dla informatyków

Część I: Elementy kombinatoryki

Jerzy Jaworski
Zbigniew Palka
Jerzy Szymański

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

Poznań 2007

4

Zależności rekurencyjne

Wiele zależności kombinatorycznych można wyrazić prosto w postaci równań rekurencyjnych. Typowym przypadkiem jest, gdy rozwiązanie danego problemu możemy sprowadzić do rozwiązań „mniejszych” problemów tego samego typu.

4.1. Proste zależności rekurencyjne

Przykład 4.1. Wyznaczyć przy pomocy zależności rekurencyjnej liczbę wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Przykład 4.2. Na ile spójnych obszarów dzieli płaszczyznę n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie?

4.2. Jednorodne zależności rekurencyjne

Zajmiemy się teraz rozwiązywaniem tak zwanych *jednorodnych (liniowych) równań rekurencyjnych*. Są one postaci

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}, \quad (4.1)$$

gdzie c_i , $i = 1, 2, \dots, r$, są zadanymi stałymi (niezależnymi od n) i $c_r \neq 0$. Powyższa zależność ma „głębokość” r więc, jak za chwilę pokażemy, aby ją rozwiązać musimy mieć zadanych r warunków początkowych. Zauważmy, że to równanie ma zawsze rozwiązanie *trywialne* $a_n = 0$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ciąg a_n spełniający (4.1), taki że $a_k \neq 0$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, nazywamy rozwiązaniem *nietrywialnym*.

Przykład 4.3. Udowodnić, że jeżeli ciągi a'_n i a''_n spełniają równanie rekurencyjne (4.1), a c jest dowolną stałą, to ciągi $a'_n + a''_n$ oraz ca'_n spełniają także to równanie.

Bezpośrednią konsekwencją powyższego przykładu jest fakt, iż kombinacja liniowa dwóch (skończonej liczby) rozwiązań jednorodnego liniowego równania rekurencyjnego jest również rozwiązaniem tego równania.

Z każdym jednorodnym równaniem rekurencyjnym (4.1) związane jest równanie algebraiczne

$$x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \dots - c_r = 0, \quad (4.2)$$

zwane jego *równaniem charakterystycznym*. Równanie (4.2) możemy otrzymać z (4.1) poprzez zamianę a_k na x^k , a następnie podzielenie przez najmniejszą potęgę x . Jak zobaczymy w dalszej części, rozwiązanie ogólne zależności (4.1) zależy od pierwiastków równania charakterystycznego (4.2) w zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

Przykład 4.4. Udowodnić, że ciąg $a_n = \alpha^n$ jest nietrywialnym rozwiązaniem równania rekurencyjnego (4.1) wtedy i tylko wtedy, gdy α jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (4.2).

Przykład 4.5. Udowodnić, że jeżeli α jest k -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego (4.2), to ciąg $a_n = n^i \alpha^n$ jest nietrywialnym rozwiązaniem równania rekurencyjnego (4.1), dla $i = 0, 1, \dots, k-1$.

W szczególnym przypadku, gdy zależność rekurencyjna (4.1) ma „głębokość” dwa, to równanie charakterystyczne jest równaniem kwadratowym, zatem możemy sformułować następujący fakt.

Lemat 4.1. Jeżeli α i β są różnymi (nie necessarily rzeczywistymi) pierwiastkami równania charakterystycznego

$$x^2 = Ax + B,$$

to równanie rekurencyjne

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$$

ma rozwiązanie ogólne postaci

$$a_n = C_1 \alpha^n + C_2 \beta^n. \quad (4.3)$$

W przypadku, gdy $\alpha = \beta$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$a_n = (C_1 + C_2 n) \alpha^n. \quad (4.4)$$

Stałe C_1 oraz C_2 występujące powyżej zależą od warunków początkowych nałożonych na równanie rekurencyjne.

Zauważmy, że w powyższym przypadku potrzebne są nam dwa warunki początkowe, które dadzą układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi C_1 i C_2 .

Przykład 4.6. Będziemy mówili, że rozwiązujący pewien problem student jest na n -tym etapie jeżeli do rozwiązania problemu pozostało mu n ($n \geq 1$) kroków. Na każdym etapie ma on pięć możliwości. Dwie z nich prowadzą go z n -tego etapu do $(n-1)$ -go etapu, a pozostałe trzy prowadzą go bezpośrednio do $(n-2)$ -go etapu. Niech a_n oznacza liczbę sposobów rozwiązania problemu zaczynając od n -tego etapu. Przyjmując, że $a_1 = 5$ oraz $a_2 = 13$ wyznaczyć wzór na a_n .

Przykład 4.7. Rozwiązać równanie rekurencyjne

$$a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2},$$

z warunkami początkowymi $a_0 = 1$, $a_1 = -9$.

Przykład 4.8. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 1 \text{ i } a_1 = 1. \quad (4.5)$$

Zależność rekurencyjna (4.5) nazywa się równaniem *Fibonacciego* a ciąg liczb 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... nosi nazwę *ciągu Fibonacciego*.

Przykład 4.10. Wyznaczyć liczby *Lucasa* L_n określone wzorem

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1},$$

gdzie F_k oznacza liczbę *Fibonacciego* z dodatkowym założeniem $F_0 = 0$.

Przykład 4.11. Niech b_n oznacza liczbę n -elementowych ciągów o elementach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$ takich, że żadne dwie po sobie następujące jedyńki ani żadne dwie po sobie następujące dwójki nie są dozwolone. Wyznaczyć wzór na b_n .

Lemat 4.1 jest szczególnym przypadkiem następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.2. *Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ są różnymi (nie koniecznie rzeczywistymi) pierwiastkami równania charakterystycznego*

$$x^r - c_1x^{r-1} - c_2x^{r-2} - \dots - c_r = 0,$$

to równanie rekurencyjne

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ra_{n-r},$$

ma rozwiązanie postaci

$$a_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + \dots + C_r\alpha_r^n.$$

Ogólnie, jeżeli

$$x^r - c_1x^{r-1} - c_2x^{r-2} - \dots - c_r = (x - \alpha_1)^{m_1}(x - \alpha_2)^{m_2} \dots (x - \alpha_k)^{m_k},$$

gdzie $m_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, k$ oraz $m_1 + m_2 + \dots + m_k = r$ (tzn. α_i jest m_i -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego), to

$$\begin{aligned} a_n = & (C_1 + C_2n + \dots + C_{m_1}n^{m_1-1})\alpha_1^n \\ & + (D_1 + D_2n + \dots + D_{m_2}n^{m_2-1})\alpha_2^n \\ & \vdots \\ & + (Z_1 + Z_2n + \dots + Z_{m_k}n^{m_k-1})\alpha_k^n. \end{aligned}$$

Stałe występujące powyżej zależą od warunków początkowych nałożonych na równanie rekurencyjne.

Przykład 4.12. *Przypuśćmy, że pewien prymitywny organizm osiąga dojrzałość po dwóch godzinach i ma wtedy pierwszych czterech potomków a następnie już co godzinę ma sześciu kolejnych potomków. Zakładając, że wszystkie urodzone organizmy zachowują się tak samo oraz, że rozpoczynaliśmy z jednym nowourodzonym organizmem, znaleźć zależność rekurencyjną dla a_n — liczby organizmów po n godzinach.*

Przykład 4.13. *Rozwiąż równanie rekurencyjne*

$$a_n = 2a_{n-1} + 15a_{n-2} + 4a_{n-3} - 20a_{n-4},$$

z warunkami początkowymi

$$a_0 = 6, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 71, \quad a_3 = 203.$$

4.3. Niejednorodne liniowe zależności rekurencyjne

Niejednorodnym liniowym równaniem rekurencyjnym nazywamy równanie postaci

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ra_{n-r} + f(n). \quad (4.6)$$

Funkcję $f(n)$ występującą w tym równaniu nazywamy *wyrazem wolnym*. Rozwiązanie ogólne tej zależności jest postaci

$$a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)},$$

gdzie $a_n^{(1)}$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego

$$a_n^{(1)} = c_1a_{n-1}^{(1)} + c_2a_{n-2}^{(1)} + \dots + c_ra_{n-r}^{(1)}, \quad (4.7)$$

które wyznaczamy zgodnie z zasadami poznanymi w poprzednim paragrafie.

Natomiast $a_n^{(2)}$ jest dowolnym szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego (4.6). Niestety, nie ma ogólnej metody znajdowania tego rozwiązania szczególnego. W dalszej części tego paragrafu, będziemy wykorzystywać metodę przewidywania rozwiązania. Polega ona na tym, że w zależności od postaci wyrazu wolnego, możemy odgadnąć postać rozwiązania. Najważniejsze przypadki, to

- 1° Jeżeli wyraz wolny $f(n)$ jest wielomianem (zmiennej n) stopnia d oraz rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $a_n^{(1)}$ nie jest wielomianem, to istnieje rozwiązanie szczególne, które jest również wielomianem stopnia d , czyli zakładamy, że

$$a_n^{(2)} = C_d n^d + C_{d-1} n^{d-1} + \dots + C_0.$$

- 2° Jeżeli $f(n)$ jest wielomianem (zmiennej n) stopnia d oraz $a_n^{(1)}$ jest wielomianem stopnia k , to przewidujemy rozwiązanie szczególne postaci

$$a_n^{(2)} = n^{k+1} (C_d n^d + C_{d-1} n^{d-1} + \dots + C_0).$$

- 3° Jeżeli $f(n)$ jest funkcją wykładniczą postaci $f(n) = C\beta^n$ i β nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, to przewidywane rozwiązanie szczególne jest również funkcją wykładniczą postaci $a_n^{(2)} = A\beta^n$.

- 4° Jeżeli $f(n)$ jest funkcją wykładniczą postaci $f(n) = C\beta^n$ i β jest pierwiastkiem równania charakterystycznego o krotności k , to przewidywane rozwiązanie szczególne jest również funkcją wykładniczą postaci $a_n^{(2)} = An^k \beta^n$.

- 5° Jeżeli natomiast wyraz wolny $f(n)$ jest sumą pewnych funkcji (zmiennej n), to przewidywane rozwiązanie szczególne jest sumą przewidywanych rozwiązań dla poszczególnych składników.

Zwróćmy uwagę, że stałą możemy interpretować jako wielomian stopnia zero lub jako funkcję wykładniczą o podstawie 1.

Przykład 4.16. *Rozwiązać równanie rekurencyjne*

$$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 3^n$$

z warunkami początkowymi $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$.

Przykład 4.17. *Znaleźć rozwiązanie ogólne równania rekurencyjnego*

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n.$$

Przykład 4.18. *Znaleźć rozwiązanie ogólne równania rekurencyjnego*

$$a_n = 2a_{n-1} + 7n^2.$$

Przykład 4.19. *Korzystając z faktu, że liczba podziałów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na dwa niepuste zbiory równa jest $2^{n-1} - 1$ (patrz Przykład ??) pokazać, że a_n określające liczbę podziałów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na trzy niepuste zbiory, spełnia dla $n \geq 1$ zależność*

$$a_n = \frac{1}{6} 3^n - \frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2}.$$

Na zakończenie tego paragrafu zwróćmy uwagę, że równania tu prezentowane można również rozwiązać innymi metodami, np. wykorzystując aparat funkcji tworzących (patrz następny rozdział).

4.4. Złożone zależności rekurencyjne

W paragrafie tym przedstawimy przykłady nieliniowych równań rekurencyjnych oraz sposoby ich rozwiązywania. Zwróćmy uwagę, że nie ma ogólnego sposobu rozwiązywania wszystkich zależności rekurencyjnych.

Przykład 4.20. Niech D_n będzie liczbą permutacji rzędu n bez punktów stałych (nieporządków). Znaleźć równanie rekurencyjne dla ciągu D_n .

Przykład 4.21. Niech B_n oznacza liczbę wszystkich podziałów zbioru mocy n na rozłączne i niepuste podzbiory, których kolejność nie jest ważna. Liczby B_n są znane w kombinatoryce jako liczby Bella. Wyznaczyć równanie rekurencyjne na B_{n+1} .

Jednym, ze sposobów rozwiązywania złożonych zależności rekurencyjnych jest metoda podstawiania nowych zmiennych i sprowadzania równania do znanej postaci.

Przykład 4.22. Rozwiązać zależność rekurencyjną

$$a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$$

z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że $a_n \geq 0$ dla każdego n naturalnego.

Przykład 4.23. Rozwiązać zależność rekurencyjną

$$a_n^2 - 2a_{n-1} = 0$$

z warunkiem początkowym $a_0 = 4$ i założeniem, że $a_n > 0$ dla każdego n naturalnego.

Przykład 4.24. Rozwiązać zależność rekurencyjną

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_{n-2} + \sqrt{a_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{a_0}}}}} \quad (4.8)$$

z warunkiem początkowym $a_0 = 4$.

Przykład 4.25. Niech $\{n_k\}$ oznacza liczbę podziałów zbioru n -elementowego na k niepustych i rozłącznych podzbiorów. Liczby te są znane jako liczby Stirlinga drugiego rodzaju i są określone dla $n, k \geq 0$. Znaleźć zależność rekurencyjną i warunki początkowe dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju.

Oczywiście, bezpośrednio z definicji zachodzi

$$\sum_{k=0}^n \{n_k\} = B_n, \quad (4.9)$$

gdzie B_n jest liczbą Bella.

Istnieją również liczby Stirlinga pierwszego rodzaju. Oznaczamy je $[n_k]$ i spełniają one równanie rekurencyjne

$$[n_k] = [n-1_{k-1}] + (n-1) [n-1_k].$$

Przykład 4.26. Wyznaczyć liczbę suriekcji zdefiniowanych na zbiorze $[n]$ i o wartościach w zbiorze $[k]$.

Przykład 4.27. Udowodnić, że

$$x^n = \sum_{k=0}^n \{n_k\} (x)_k. \quad (4.10)$$

Zależności rekurencyjne znajdują między innymi zastosowanie przy rozwiązywaniu z wykorzystaniem komputerów *zadań numerycznych*, które polegają na obliczaniu wielkości zdefiniowanych za pomocą zależności matematycznych. Jako pierwszy przykład opiszemy pewien sposób obliczania wartości wielomianu dla danego argumentu.

Przykład 4.28. Obliczyć wartość wielomianu

$$w_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (4.11)$$

dla ustalonej wartości argumentu $x = z$.

Przykład 4.29. Zadanie polega na wyznaczeniu przybliżenia pierwiastka równania $f(x) = 0$, gdzie $f(x)$ jest zadaną funkcją.

4.5. Zadania

Zadanie 4.1. Znaleźć i udowodnić wzór na wyraz ogólny ciągu, dla którego zachodzi następujące równanie rekurencyjne

$$a_n = n^2 a_{n-1}$$

przy założeniu, że $a_1 = 1$.

Zadanie 4.2. Każdego roku pewna populacja królików podwaja się. Jeżeli początkowo było sześć królików, to ile ich będzie po n latach?

Zadanie 4.3. Niech b_n oznacza liczbę takich n -elementowych ciągów binarnych, że żadne dwa po sobie następujące 0 nie są dozwolone. Znaleźć zależność rekurencyjną dla b_n .

Zadanie 4.4. Niech $h(k, n)$ będzie liczbą rozsadzeń w określonym porządku k pacjentów w poczekalni, w której jest n krzeseł, tak aby żaden pacjent nie siedział bezpośrednio obok drugiego. Znaleźć zależność rekurencyjną dla $h(k, n)$.

Zadanie 4.5. Niech p_n będzie liczbą podziałów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na dwa niepuste zbiory? Znaleźć zależność rekurencyjną dla p_n i na jej podstawie wyznaczyć wzór na liczbę takich podziałów.

Zadanie 4.6. Niech s_n będzie liczbą podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, wliczając zbiór pusty, które nie zawierają sąsiednich liczb? Znaleźć zależność rekurencyjną dla s_n i na jej podstawie wyznaczyć wzór na liczbę takich podzbiorów.

Zadanie 4.7. Przypuśćmy, że dowolna nowourodzona para królików ma swoją pierwszą parę potomstwa po dwóch miesiącach, a później już co miesiąc rodzi nową parę. Zakładając, że zaczynamy od jednej pary, znaleźć zależność rekurencyjną dla k_n - liczby par po n miesiącach.

Zadanie 4.8. Rozwiązać równania rekurencyjne:

(a) $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 1$.

(b) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 2$.

(c) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $a_0 = 4$, $a_1 = 4$.

Zadanie 4.9. Korzystając z faktu, że

$$(x-2)^2(x+1)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$$

podać wzór na wyraz ogólny ciągu, dla którego zachodzi następujące równanie rekurencyjne

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} - 4a_{n-3} + 12a_{n-4}.$$

Zadanie 4.10. Rozwiązać równania rekurencyjne:

- (a) $a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 3$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.
- (b) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^n$, $a_0 = a_1 = 2$.
- (c) $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$.
- (d) $a_n = a_{n-1} + 7n$, $a_0 = 0$.

Zadanie 4.11. Rozwiązać następujące liniowe równania rekurencyjne

- (a) $a_{n+1} = 2a_n - 1$, gdzie $a_0 = 3$,
- (b) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, gdzie $a_0 = 1$ i $a_1 = 2$,
- (c) $a_n = 3a_{n-1} + 3^n$, gdzie $a_0 = 2$,
- (d) $a_n = a_{n-1} + n^3$, gdzie $a_0 = 0$,
- (e) $a_n = 3a_{n-1} - 4n$, gdzie $a_0 = 2$,
- (f) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, gdzie $a_0 = 2$,
- (g) $a_n = 3a_{n-1} + 3^n$, gdzie $a_0 = 2$ i $a_1 = 1$.

Zadanie 4.12. Znajdź rozwiązanie ogólne następujących liniowych równań rekurencyjnych

- (a) $a_{n+2} = 4a_n$,
- (b) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 16a_n = 0$.

Zadanie 4.13. Dane jest równanie charakterystyczne

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$$

pewnego liniowego równania rekurencyjnego z warunkami początkowymi $a_0 = 1$, $a_1 = -9$, $a_2 = -1$ i $a_3 = 2$. Wyznaczyć a_n .

Zadanie 4.14. Rozwiązać równanie rekurencyjne

$$a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = f(n),$$

gdzie

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 5, \\ 0, & \text{dla } n \neq 5, \end{cases}$$

z warunkiem początkowym $a_0 = a_1 = 0$.

Zadanie 4.15. Niech a_n oznacza liczbę rozłącznych części na jakie dzieli n -kąt wypukły jego przekątne. Zakładamy, że żadne 3 przekątne nie przecinają się w jednym punkcie.

- (a) Pokaż, że

$$a_n = a_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + n - 2 \quad \text{dla } n \geq 3$$

oraz $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

- (b) Wyznacz a_n .

Zadanie 4.16. Rozwiązać równanie rekurencyjne

$$na_n + na_{n-1} - a_{n-1} = 2^n$$

z warunkiem początkowym $a_0 = 3456$.

Zadanie 4.17. Rozwiązać równanie rekurencyjne

$$a_n = na_{n-1} + n!$$

z warunkiem początkowym $a_0 = 2$.

Zadanie 4.18. Znaleźć wartość wielomianu

$$w_n(x) = 9x^5 + 8x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 5x + 4$$

dla $x = 7$ korzystając ze schematu Hornera.

Zadanie 4.19. Korzystając z metody Newtona znaleźć z dokładnością do 10^{-6} pierwiastek równania

$$e^{-x} = x$$

Zadanie 4.20. Udowodnić, że dla liczb Fibonacciego spełnione są tożsamości

- (a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$,
- (b) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$,
- (c) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$,
- (d) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

Zadanie 4.21. Udowodnić, że liczby Fibonacciego spełniają tożsamość

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad (4.12)$$

znaną jako równość Cassiniego.

Zadanie 4.22. Udowodnić, że dla liczb Lucasa spełnione są równania

- (a) $L_0 + L_1 + L_2 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 1$,
- (b) $L_1 + L_3 + L_5 + \cdots + L_{2n+1} = L_{2n+2} - 2$.