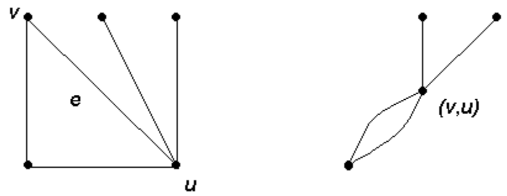
TEORIA GRAFÓW. MATERIAŁY III.

semestr zimowy 2015/2016 Jerzy Jaworski

2.2. Przeliczanie drzew rozpiętych. Wzór Cayley'a.

Można podać elegancki wzór rekurencyjny na liczbę rozpiętych drzew w danym grafie używając operacji ściągania (kontrakcji) krawędzi. Krawędź e grafu G została **ściągnięta** jeżeli usunięta została z grafu oraz jej końce zostały zidentyfikowane. Otrzymany w ten sposób graf oznaczać będziemy $G \cdot e$.

Przykład 2.5.



Oczywiście, jeżeli e nie jest pętlą w G, to

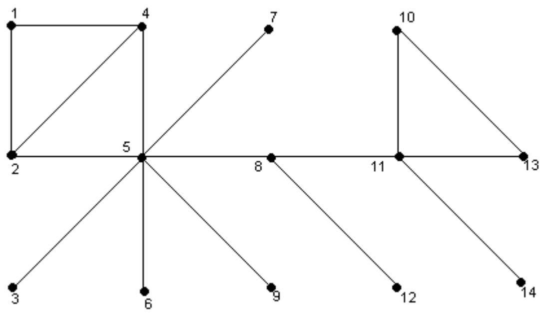
$$\nu(G \cdot e) = \nu(G) - 1, \quad \varepsilon(G \cdot e) = \varepsilon(G) - 1, \quad \omega(G \cdot e) = \omega(G).$$

Stąd, jeżeli T jest drzewem, to $T \cdot e$ też jest drzewem.

Twierdzenie 2.4. *Oznaczmy liczbę rozpiętych drzew grafu G przez $\tau(G)$. Jeżeli e nie jest pętlą w grafie G, to*

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e).$$

Przykład 2.6. Znajdź liczbę drzew rozpiętych w podanym niżej grafie.



Wzór na liczbę $\tau(K_n)$ podany poniżej w Twierdzeniu 2.9 został podany przez Cayley w 1889.

Twierdzenie 2.5.

$$\tau(K_n) = n^{n-2}.$$

Przykład 2.7. Pokaż, że jeżeli e jest krawędzią K_n, to

$$\tau(K_n - e) = (n-2)n^{n-3} .$$

Przykład 2.8. Niech graf H będzie grafem otrzymanym z grafu prostego G przez zastąpienie każdej krawędzi z G ścieżką o długości k. Pokaż, że

$$\tau(H) = k^{\varepsilon - \nu + 1}\tau(G) .$$

ZADANIA V

Zadanie 19. Znajdź liczbę drzew rozpiętych w $K_{3,3}$.

Zadanie 20. Niech G będzie grafem prostym, a H grafem, w którym każde dwa wierzchołki przyległe w G są połączone dokładnie k krawędziami. Pokaż, że

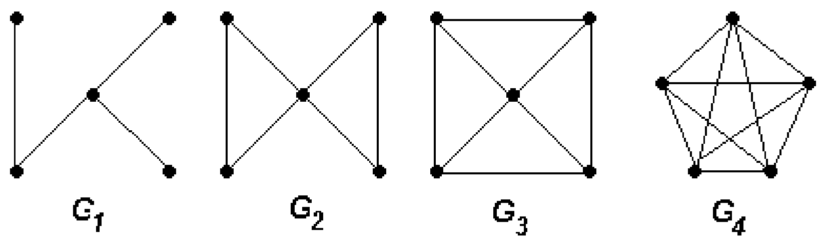
$$\tau(H) = k^{\nu-1}\tau(G) \ .$$

Zadanie 21. Wykorzystując ideę z *Przykładu 2.8.* i poprzedniego zadania pokaż, że $\tau(K_{2,n}) = n2^{n-1}$.

3. SPÓJNOŚĆ.

3.1. „Siła" spójności.

Przykład 3.1. Podane niżej grafy są spójne. Dlaczego każdy kolejny graf wydaje się (intuicyjnie) mocniej spójny niż poprzedni?

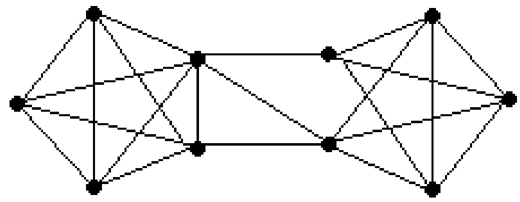


Parametrami grafu mierzącymi siłę spójności są: spójność wierzchołkowa i spójność krawędziowa.
Cięciem wierzchołkowym grafu G nazywamy podzbiór V' zbioru wierzchołków V taki, że $G - V'$ nie jest spójny. **Cięcie k-wierzchołkowe** jest to cięcie wierzchołkowe o k elementach, tzn. $|V'| = k$.
Graf pełny nie posiada żadnego wierzchołkowego cięcia; wszystkie grafy posiadające grafy pełne jako rozpięte podgrafy nie mają wierzchołkowego cięcia. Jeżeli graf G ma co najmniej jedną parę różnych nieprzyległych wierzchołków, to **spójność wierzchołkowa** $\kappa(G)$ grafu G jest równa minimalnemu k, dla którego graf G ma cięcie k -wierzchołkowe; w przeciwnym razie będziemy przyjmować, że $\kappa(G) = \nu - 1$. Zatem $\kappa(G) = 0$ jeżeli G nie jest spójny lub G jest grafem trywialnym. O grafie G mówimy, że jest **k-spójny (wierzchołkowo k-spójny)** jeżeli $\kappa(G) \geq k$. Wszystkie nietrywialne spójne grafy są 1-spójne.

Cięciem krawędziowym grafu G nazywamy podzbiór zbioru E postaci $[S, S^c]$, gdzie S jest niepustym właściwym podzbiorem V, S^c jego dopełnieniem ($S^c = V - S$). **Cięcie k-krawędziowe** to cięcie krawędziowe o k elementach. Jeżeli G jest nietrywialny i spójny a E' jest jego cięciem krawędziowym, to $G - E'$ nie jest spójny. Definiujemy **spójność krawędziową** $\kappa'(G)$ jako minimalne k, dla którego spójny graf G ma cięcie k-krawędziowe. Jeżeli G nie jest spójny lub jest grafem trywialnym, to przyjmujemy, że $\kappa'(G) = 0$. Zatem $\kappa'(G) = 1$ oznacza, że graf G jest spójny i posiada krawędź cięcia. Graf nazywamy **k-krawędziowo spójnym** jeżeli $\kappa'(G) \geq k$. Wszystkie nietrywialne grafy spójne są 1-krawędziowo spójne.

Twierdzenie 3.1. $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$.

Przykład 3.2. Podaj dla podanego grafu jego parametry κ, κ', δ.



Przykład 3.3.
(a) *Pokaż, że dla prostego grafu G, dla którego $\delta(G) \geq \nu(G)/2$ mamy $\kappa'(G) = \delta(G)$.*
(b) *Podaj przykład prostego grafu G takiego, że $\delta(G) = \lfloor \nu(G)/2 - 1 \rfloor$ i $\kappa'(G) < \delta(G)$.*

Przykład 3.4. Pokaż, że jeśli G jest 3-regularnym grafem prostym, to $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

ZADANIA VI

Zadanie 22.
(a) Pokaż, że jeśli graf G jest k-krawędziowo spójny, $k > 0$, i E' jest zbiorem składającym się z k krawędzi grafu G, to $\omega(G - E') \leq 2$.
(b) Dla dowolnego $k > 0$ podaj przykład k-spójnego grafu G takiego, że dla zbioru V' zawierającego k wierzchołków G mamy $\omega(G - V') > 2$.

Zadanie 23. Pokaż, że jeśli G jest k-krawędziowo spójny, to $\varepsilon(G) \geq k\nu(G)/2$.

Zadanie 24*.
(a) Pokaż, że jeśli G jest grafem prostym takim, że $\delta(G) \geq \nu(G) - 2$, to $\kappa(G) = \delta(G)$.
(b) Podaj przykład grafu prostego G takiego, że $\delta(G) = \nu(G) - 3$ oraz $\kappa(G) < \delta(G)$.

3.2. Twierdzenia Whitneya i Mengera.

Rodzinę ścieżek grafu G nazywamy *wewnętrznie rozłączną* jeżeli żaden wierzchołek grafu G nie jest wierzchołkiem wewnętrznym więcej niż jednej ścieżki należącej do tej rodziny. W 1932 roku Whitney podał następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2. *Graf G o ν wierzchołkach, $\nu \geq 3$, jest 2-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa wierzchołki grafu G są połączone przez co najmniej dwie wewnętrznie rozłączne ścieżki.*

Wniosek 3.2.1. *Jeżeli G jest 2-spójny, to każde dwa wierzchołki grafu G leżą na wspólnym cyklu.*

Wprowadzimy teraz operację **podziału krawędzi**. O krawędzi e mówimy, że jest podzielona jeżeli jest usunięta z grafu i zastąpiona przez ścieżkę o długości dwa łączącą jej końce. Wierzchołek wewnętrzny tej ścieżki jest nowym wierzchołkiem grafu.

Wniosek 3.2.2. *Jeżeli G jest grafem 2-spójnym o $\nu \geq 3$, to każde dwie krawędzie grafu G leżą na wspólnym cyklu.*

Twierdzenie 3.2 ma uogólnienie, znane jako *twierdzenie Mengera*, na grafy k-spójne.

Twierdzenie 3.3. *Graf G o $\nu \geq k+1$ wierzchołkach jest k-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa różne wierzchołki grafu G są połączone przez co najmniej k wewnętrznie rozłącznych ścieżek.*

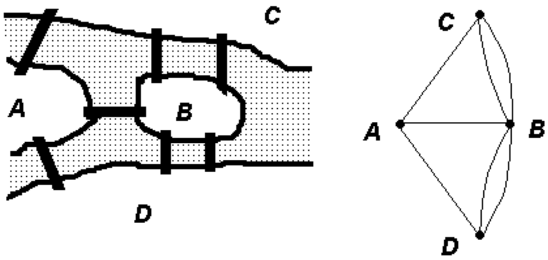
Wersja krawędziowa tego twierdzenia jest następująca:

Twierdzenie 3.4. *Graf G jest k-krawędziowo spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa różne wierzchołki są połączone przez co najmniej k krawędziowo-rozłącznych ścieżek.*

4. OBCHODY EULERA I CYKLE HAMILTONA.

4.1. Obchody Eulera.

Szlak, który zawiera każdą krawędź grafu G jest nazywany **szlakiem Eulera** grafu G. W 1736 r. (pierwsze prace z teorii grafów) Euler pokazał, że nie można przejść każdego z siedmiu mostów w Królewcu dokładnie jeden raz w czasie spaceru po mieście

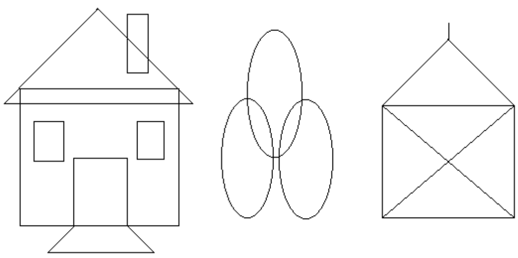


Obchód grafu G to domknięty spacer przechodzący przez każdą krawędź G przynajmniej jeden raz. **Obchód Eulera** jest obchodem zawierającym każdą krawędź grafu G dokładnie jeden raz (jest to po prostu domknięty szlak Eulera). Graf nazywamy **eulerowskim** (grafem Eulera) jeżeli zawiera obchód Eulera.

Twierdzenie 4.1. *Niepusty spójny graf jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada wierzchołków o nieparzystym stopniu.*

Wniosek 4.1. *Graf spójny ma szlak Eulera (jest półeulerowski) wtedy i tylko wtedy, gdy ma co najwyżej dwa wierzchołki stopnia nieparzystego.*

Przykład 4.1. Które z następujących figur mogą być narysowane bez odrywania kredy od tablicy, rysując każdą linię tylko jeden raz?



Przykład 4.2 Pokaż, że jeżeli w G nie ma wierzchołka nieparzystego stopnia, to istnieją krawędziowo rozłączne cykle $C_1, C_2, \ldots, C_m$ takie, że

$$E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \cdots \cup E(C_m)\ .$$